Il calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio è quella parte della Matematica che si occupa di **raggruppamenti** degli elementi di un insieme.
L'applicazione del calcolo combinatorio ha contribuito allo sviluppo di discipline come la Statistica, la Probabilità, la Biologia, la Fisica.

Raggruppamenti

Raggruppare gli elementi di un insieme significa creare dei gruppi secondo certe regole.
In questi appunti apprenderai le principali procedure per stabilire quanti e quali gruppi si possono fare prendendo gli elementi di un qualunque insieme finito.

Primo tipo di raggruppamento: la Permutazione

Probabilmente ricordi quella proprietà delle proporzioni che si chiama "permutare dei medi e degli estremi". Era quella che ti faceva "cambiare di posto" alla coppia dei medi o a quella degli estremi ottenendo ancora una proporzione.
Infatti permutare vuol dire semplicemente "scambiare di posto"
Si chiamano Permutazioni quei raggruppamenti che si possono fare utilizzando sempre tutti gli elementi dell'insieme *cambiando ogni volta la loro sequenza*.

Facciamo alcuni esempi:

- ho un insieme A di 4 oggetti

  A = {⬟; ◊; ○; ✚}

  Voglio vedere quante sequenze diverse (permutazioni) riesco a fare usandoli tutti. Eccole.

⬟	◊	○	✚
⬟	◊	✚	○
⬟	○	◊	✚
⬟	○	✚	◊
⬟	✚	○	◊
⬟	✚	◊	○

◊	⬟	○	✚
◊	⬟	✚	○
◊	○	⬟	✚
◊	○	✚	⬟
◊	✚	○	⬟
◊	✚	⬟	○

○	⬟	◊	✚
○	⬟	✚	◊
○	◊	⬟	✚
○	◊	✚	⬟
○	✚	◊	⬟
○	✚	⬟	◊

✚	⬟	◊	○
✚	⬟	○	◊
✚	◊	⬟	○
✚	◊	○	⬟
✚	○	◊	⬟
✚	○	⬟	◊

  Con 4 elementi riesco a fare **24 Permutazioni**. $\mathcal{P}_4 = 24$

- E con un insieme di soli 2 oggetti? Le permutazioni sono **solo 2**.
  B = {⊡; ◘ }

⊡	◘

◘	⊡

$$\mathcal{P}_2 = 2$$

- Con 3 elementi sono **6**.
  C = {⊡; ◘; ◆}

⊡	◘	◆
⊡	◆	◘

◘	⊡	◆
◘	◆	⊡

⊡	◘	◆
⊡	◆	◘

$$\mathcal{P}_3 = 6$$

Si può prevedere quante permutazioni si riescono a fare con un insieme di ***n*** elementi?
Analizzando gli esempi fatti puoi scoprire che per sapere il numero delle permutazioni possibili devi **moltiplicare il numero degli elementi per tutti i numeri interi che lo precedono.**

Infatti se hai 2 elementi devi fare (2 * 1) = 2
se hai 3 elementi devi fare (3 * 2 * 1) = 6
se hai 4 elementi devi fare (4 * 3 * 2 * 1) = 24
eccetera

La funzione descritta si chiama FATTORIALE e si indica col punto esclamativo “!”

2! = 2 3! = 6 4! = 24 5! = 120 6! = 720 …….

Il numero $\mathcal{P}_n$ delle permutazioni possibili in un insieme di n elementi è n! (n fattoriale)

$$\mathcal{P}_n = n!$$

Secondo tipo di raggruppamento: le Disposizioni

Si chiamano **Disposizioni** quei raggruppamenti che si possono fare prendendo ogni volta un numero k degli n elementi (dove $k \leq n$) e tali che ogni raggruppamento è diverso dagli altri *almeno per un oggetto* oppure *per la sequenza*.
Ce ne sono di due tipi: con o senza ripetizione dell’elemento.

A) Disposizioni semplici.
In questi raggruppamenti l’oggetto non si può ripetere.
Per poter calcolare quanti sono dobbiamo sapere quanti elementi ci sono nell’insieme (n) e quanti ne possiamo usare per raggrupparli (k). Indicheremo questo numero con $\mathcal{D}_{n,k}$ (Disposizioni semplici di n oggetti presi k a k).

Esempi:

- Prendiamo 3 oggetti e raggruppiamoli 2 a 2 (a coppie) senza ripeterli A = {⊡; ◘; ◆}.

⊡	◘		◘	⊡		◆	◘
⊡	◆		◘	◆		◆	⊡

Riusciamo a fare 6 coppie.

- Prendiamo ora 4 oggetti e raggruppiamoli 3 a 3 sempre senza ripetizioni
  B = {♥; ♦; ♣; ♠}.

♥	♦	♠		♦	♥	♣		♣	♥	♠		♠	♥	♦
♥	♦	♣		♦	♥	♠		♣	♥	♦		♠	♥	♣
♥	♣	♦		♦	♣	♠		♣	♦	♠		♠	♦	♣
♥	♣	♠		♦	♣	♥		♣	♦	♥		♠	♦	♥
♥	♠	♦		♦	♠	♣		♣	♠	♥		♠	♣	♥
♥	♠	♣		♦	♠	♥		♣	♠	♦		♠	♣	♦

Sono 24 gruppi.

Ecco la regola:

Il numero delle Disposizioni semplici che si possono fare prendendo n elementi k a k (con $k \le n$) è dato dal prodotto di k numeri interi, a partire da n, in senso decrescente.

Infatti

$\mathcal{D}_{3,2} = 3 * 2 = 6$ $\mathcal{D}_{4,3} = 4 * 3 * 2 = 24$

In generale quindi

$$\boxed{\mathcal{D}_{n,k} = n * (n-1) * (n-2) * .... * (n-k+1)}$$

B) Disposizioni ripetitive.

In questi raggruppamenti l'oggetto si può ripetere.

Per poter calcolare quanti sono dobbiamo sapere quanti elementi ci sono nell'insieme (n) e quanti ne possiamo usare per raggrupparli (k). Indicheremo questo numero con ${}^{*}\mathcal{D}_{n,k}$ che si legge: Disposizioni con ripetizione di n oggetti presi k a k. Se si possono ripetere k può anche essere maggiore di n.

Esempi:

- Ho 3 oggetti A = {⊡; ◘; ◆}. Quanti gruppi posso fare prendendoli 2 a 2 e potendoli ripetere?

⊡	⊡
⊡	◘
⊡	◆

◆	◆
◆	◘
◆	⊡

◘	◘
◘	⊡
◘	◆

Riesco a fare 9 gruppi.

- Se invece ho solo 2 oggetti e li prendo 4 a 4? (Nota che questo esempio potrebbe essere l'esperimento di lanciare in aria quattro monete e controllare tutti i risultati di Testa o Croce).
  B = {T; C}.

T	T	T	T
C	T	T	T
T	C	T	T
C	C	T	T

T	T	C	T
C	T	C	T
T	C	C	T
C	C	C	T

T	T	T	C
C	T	T	C
T	C	T	C
C	C	T	C

T	T	C	C
C	T	C	C
T	C	C	C
C	C	C	C

Riesco a fare 16 gruppi.

Quindi se: ${}^{*}\mathcal{D}_{3,2} = 9$ e ${}^{*}\mathcal{D}_{2,4} = 16$

Allora

Il numero di Disposizioni con ripetizione di n oggetti presi k a k è uguale a n^k.

$^{*}\mathcal{D}_{n,k} = n^k$

Terzo tipo di raggruppamento: le Combinazioni

Si chiamano **Combinazioni** quei raggruppamenti che si possono fare prendendo ogni volta un numero k degli n elementi (dove $k \leq n$) e tali che ogni raggruppamento è diverso dagli altri *almeno per un oggetto*. Le ripetizioni sono escluse.

Le Combinazioni si indicano con $\mathcal{C}_{n,k}$

Importante!

Nelle Combinazioni **la sequenza non ha alcuna importanza**. Combinazioni diverse hanno almeno un oggetto diverso. Con gli stessi oggetti di una combinazione non se ne possono fare altre.

Vediamo qualche esempio di Combinazioni:

- Combinazioni di 4 oggetti presi 3 a 3 cioè $\mathcal{C}_{4,3}$

  A = {⬟; ◊; ○; ✚}

⬟	◊	○		⬟	◊	✚
⬟	○	✚		◊	○	✚

  Le combinazioni sono solo 4

- Combinazioni di 5 oggetti presi 2 a 2 $\mathcal{C}_{5,2}$

  B = {①; ②; ③; ④; ⑤}

  Quando si prendono 2 a 2 conviene costruire una tabella a doppia entrata:

	①	②	③	④	⑤
①	①①	①②	①③	①④	①⑤
②	②①	②②	②③	②④	②⑤
③	③①	③②	③③	③④	③⑤
④	④①	④②	④③	④④	④⑤
⑤	⑤①	⑤②	⑤③	⑤④	⑤⑤

  Escludiamo poi le ripetizioni e le combinazioni uguali. Le caselle evidenziate indicano le Combinazioni possibili; sono 10.

La formula per calcolarle è un po' complessa:

Il numero di Combinazioni di n oggetti presi k a k (con $k \leq n$) è dato dal rapporto fra il numero delle Disposizioni semplici dello stesso insieme e k!

$$\mathcal{C}_{n,k} = \mathcal{D}_{n,k} / k!$$

Negli esempi precedenti avevamo:

$\mathcal{C}_{4,3} = \frac{4*3*2}{3*2*1} = 4$ $\qquad \mathcal{C}_{5,2} = \frac{5*4}{2*1} = 10$

Combinazioni di cinquine al Lotto: $\mathcal{C}_{90,5} = \frac{90*89*88*87*86}{5*4*3*2*1} = 43\,949\,268$.

Giochi d'azzardo

Sono tutti quelli nei quali il giocatore scommette una certa somma di denaro sul verificarsi di un certo evento.
Sono giochi d'azzardo legali tutti i concorsi legati al Gioco del calcio, al Lotto e alle varie Lotterie; inoltre vi sono altri giochi minori come i vari Gratta e Vinci.
Altri tipi di giochi d'azzardo con le Carte, la Roulette, le Slot Machine vengono gestiti in luoghi controllati e autorizzati.
Tutti questi giochi hanno ovviamente delle regole e il giocatore punta i soldi a suo rischio.
In caso di vincita la Società o l'Ente che gestisce il gioco paga al vincitore un Premio in denaro anche questo stabilito dal regolamento. Ed è proprio sulle vincite che si trovano dei fatti curiosi.
Un gioco viene definito EQUO se la vincita è proporzionata al "speranza matematica" cioè alla probabilità della vincita stessa. Facciamo un esempio: supponiamo di puntare su una combinazione di numeri che ha 1 probabilità su 500 di avverarsi; se il gioco fosse equo puntando 1 Euro - in caso di vincita - dovrei riceverne 500, se ne puntassi 3 dovrei incassare 1500 € e così via. I giochi che abbiamo descritto sopra sono EQUI? Leggete qui e giudicate voi.

Uno dei concorsi più giocati in Italia è il Superenalotto. La vincita massima si ottiene indovinando una combinazione di 6 numeri estratti sulle ruote del Lotto nelle principali città italiane. Il record della vincita più alta è stato di quasi 35 milioni di Euro! Una cifra enorme. Ed è proprio l'ordine di grandezza delle vincite che spinge la gente a giocare; in effetti molta gente pensa in questi termini: "rischiando solo un Euro potrei diventare ricchissimo!". Ma, fate attenzione, il Superenalotto non è affatto un gioco equo. La probabilità di indovinare la combinazione del "sei" vincente è 1 sola su più di 622 milioni! Se fosse Equo ci dovrebbero essere vincite di più di 622 milioni di Euro (non di 35 milioni al massimo, ben 18 volte inferiore). Inoltre è un gioco in cui è molto, ma molto difficile vincere. Non ne sei convinto? Hai idea di quante siano 622 milioni di combinazioni? Giocandone 50 a settimana (50 Euro spesi) per farle tutte ti servirebbero 12.440.000 settimane ovvero 2.800.000 mesi che sono poi 233.000 anni!
E non è affatto detto che vinci….
Moltissima gente queste cose le ignora completamente e continua a giocare ogni settimana un bel mucchietto di soldi.

$$\mathcal{C}_{90,6} = \frac{90*89*88*87*86*85}{6*5*4*3*2*1} = 622\ 614\ 630\ .$$

Conclusioni: vincere al Superenalotto è difficilissimo. Inoltre - anche in caso di vincita - il premio è nettamente inferiore a quello che sarebbe giusto ed equo…..